

RIASSUNTO FISICA 1

CINEMATICA

DEFINIZIONE: COSTANTE DI TEMPO → In fisica ed ingegneria la costante di tempo (indicata dalla lettera greca τ , tau) caratterizza la frequenza di risposta di un sistema dinamico lineare, in particolare di un sistema dinamico lineare stazionario.

$$\frac{df(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau} * (f(t) - k)$$

DEFINIZIONE: EQUAZIONE VETTORIALE DEL MOTO → $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ con $\mathbf{r}$ =vettore posizione del punto materiale.

DEFINIZIONE: ASCISSA CURVILINEA → si indica con "s" ed è l'insieme dei punti occupati dal corpo durante il suo moto.

La descrizione del moto si può effettuare attraverso le equazioni:

$$\begin{cases} \mathbf{r}=\mathbf{r}(s) \\ s=s(t) \end{cases}$$

equazione della
traiettoria

legge oraria

DIMOSTRAZIONE: VELOCITA' ISTANTANEA

La velocità rappresenta la variazione dello spazio percorso dal corpo in un determinato intervallo di tempo. È possibile quindi dare una prima equazione a tale grandezza scrivendo:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

È facile intuire che però tale formula è applicabile solo nel caso in cui la velocità sia costante. Volendo però noi ottenere la formula della velocità istantanea cerchiamo di calcolare la velocità per un intervallo di tempo che tende a 0 così da avere un valore di velocità il più simile possibile a quello istantaneo:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t}$$

Essendo questa equazione un rapporto incrementale possiamo concludere che v è la derivata del vettore posizione rispetto al tempo, per cui avremo che:

$$v(t) = \frac{dr(t)}{dt}$$

Consideriamo ora il rapporto $\frac{\Delta r}{\Delta s}$, dove Δr è la variazione del vettore posizione e Δs è invece il tratto di ascissa curvilinea percorso. Tale rapporto da un vettore avente come modulo 1 e come direzione quella tangente alla traiettoria. Si ha quindi che il risultato di $\frac{\Delta r}{\Delta s}$ è il versore tangente alla traiettoria e può essere scritto come $u_t = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta s} = \frac{dr}{ds}$. Siccome $v = \frac{dr}{dt}$ possiamo sfruttare il ruolo intermediario di $s(t)$ tra r e t scrivendo $v = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds} * \frac{ds}{dt}$, e siccome $\frac{ds}{dt}$ è uguale alla velocità scalare, ovvero al modulo della velocità, e $\frac{dr}{ds}$ è invece uguale al versore tangente alla curva, allora il vettore velocità istantanea è rappresentabile con l'equazione:

$$\text{Vettore velocità} \rightarrow v = v_s * u_t$$

Velocità scalare
(modulo della velocità) Versore tangente alla
traiettoria

E siccome v_s è uguale alla derivata del vettore posizione rispetto al tempo si può scrivere:

$$v = \dot{s} * u_t$$

L'equazione oraria permette di calcolare la velocità scalare in ogni istante di tempo derivando l'equazione oraria stessa.

DIMOSTRAZIONE: ACCELERAZIONE ISTANTANEA

L'accelerazione è la grandezza che misura la variazione della velocità in un intervallo di tempo. Possiamo quindi dare una prima equazione:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Per trovare l'equazione dell'accelerazione istantanea calcoliamo l'accelerazione media in un intervallo di tempo infinitamente piccolo:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Questa equazione, essendo un rapporto incrementale, rappresenta la derivata prima del vettore velocità e di conseguenza la derivata seconda del vettore posizione:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2}$$

Sostituendo al vettore velocità la sua equazione $\dot{s} * u_t$ ed effettuando quindi la derivata di tale prodotto si ottiene:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\dot{s} * u_t)}{dt} = \frac{d\dot{s}}{dt} * u_t + \dot{s} * \frac{du_t}{dt}$$

Analizziamo ora i due addendi:

- $\frac{d\dot{s}}{dt} * u_t \rightarrow \frac{d\dot{s}}{dt}$ è la derivata seconda del vettore posizione rispetto al tempo, ovvero il modulo del vettore accelerazione, u_t è invece il versore tangente alla traiettoria. Possiamo quindi dire che $\frac{d\dot{s}}{dt} * u_t = \ddot{s} * u_t$: tale componente dell'accelerazione è detta accelerazione tangenziale;
- $\dot{s} * \frac{du_t}{dt} \rightarrow$ per ottenere una rappresentazione significativa di questo addendo è necessario:
 - o esplicitare il versore u_t :

- Ricordando che $u_t = \frac{dr}{ds}$ esprimiamo la dipendenza di u_t dal tempo:

$$\frac{du_t}{dt} = \frac{du_t}{ds} * \frac{ds}{dt} = \dot{s} * \frac{du_t}{ds}$$

- $\frac{du_t}{ds}$ rappresenta una caratteristica intrinseca della traiettoria che dipende dal punto P (del quale stiamo prendendo in analisi l'accelerazione) e può essere espressa come

$$\frac{du_t}{ds} = \frac{d\varphi}{ds} * u_n$$

Dove $\frac{d\varphi}{ds}$ è la derivata della traiettoria rispetto allo spazio e u_n è il versore perpendicolare alla traiettoria.

- o Consideriamo ora il cerchio osculatore del tratto di curva che stiamo analizzando (il cerchio osculatore è quello che meglio approssima la curva) e consideriamo il raggio di curvatura ρ (il raggio di curvatura è il raggio del cerchio osculatore):
 - $d\varphi$ è l'angolo che il raggio di curvatura spazza nell'arco di tempo e come tale è calcolabile come la lunghezza del tratto di curva percorso diviso il raggio della circonferenza:

$$d\varphi = \frac{ds}{\rho}$$

- Sostituendo in $\frac{d\varphi}{ds} * u_n$ si ottiene che:

$$\frac{d\varphi}{ds} * u_n = \frac{ds}{\rho * ds} * u_n = \frac{1}{\rho} * u_n$$

E siccome $\frac{du_t}{ds} = \frac{d\varphi}{ds} * u_n$ allora:

$$\frac{du_t}{ds} = \frac{1}{\rho} * u_n$$

- Sostituendo in $\dot{s} * \frac{du_t}{ds}$ si ottiene:

$$\frac{du_t}{dt} = \dot{s} * \frac{1}{p} * u_n$$

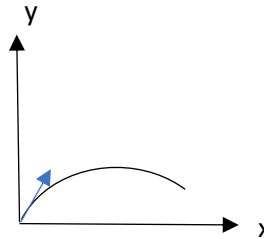
- Infine sostituendo in $\dot{s} * \frac{du_t}{dt}$ si ottiene:

$$\dot{s} * \frac{du_t}{dt} = \dot{s} * \dot{s} * \frac{1}{p} * u_n = \dot{s}^2 * \frac{1}{p} * u_n = \frac{\dot{s}^2}{p} * du_t = \frac{v^2}{p} * u_n$$

L'equazione trovata è $a_n = \frac{v^2}{p} * u_n$ (dove p come detto è il raggio di curvatura)
ed è l'equazione dell'accelerazione normale.

Accelerazione
normale

Versore normale



DIMOSTRAZIONE: L'EQUAZIONE DEL MOTO DI UN PROIETTILE E' UNA PARABOLA

Consideriamo un corpo in moto orizzontale in caduta libera:

- Tale moto è suddivisibile sugli assi cartesiani in due moti:
 - Asse x: moto rettilineo uniforme;
 - Asse y: moto rettilineo uniformemente accelerato.
- Il moto può quindi essere descritto dalle equazioni:

$$\begin{cases} s_x = v_0 * t * \cos(\theta) \\ s_y = v_0 * t * \sin(\theta) - \frac{1}{2} * g * t^2 \\ s_z = 0 \end{cases}$$

- Eliminiamo t dal sistema:

$$s_x = v_0 * t * \cos(\theta) \rightarrow t = \frac{s_x}{v_0 * \cos(\theta)}$$

- Sostituendo nella seconda equazione si ha:

$$s_y = v_0 * t * \sin(\theta) - \frac{1}{2} * g * t^2 \rightarrow s_y = v_0 * \left(\frac{s_x}{v_0 * \cos(\theta)} \right) * \sin(\theta) - \frac{1}{2} * g * \left(\frac{s_x}{v_0 * \cos(\theta)} \right)^2$$

- Semplificando otteniamo:

$$s_y = \left(\frac{s_x}{\cos(\theta)} \right) * \sin(\theta) - \frac{1}{2} * g * \left(\frac{s_x}{v_0 * \cos(\theta)} \right)^2 \rightarrow s_y = s_x * \tan(\theta) - \frac{1}{2} * g * \left(\frac{s_x^2}{v_0^2 * \cos^2(\theta)} \right)$$

Che è l'equazione di una parabola giacente sul piano $z = 0$ nella quale, dato che x^2 è negativo, la concavità è verso il basso.

DEFINIZIONE: MOTI RELATIVI → le leggi di trasformazione dei moti relativi costituiscono gli strumenti per calcolare le relazioni tra le caratteristiche dei moti nei diversi sistemi di riferimento. Consideriamo la situazione in figura. Abbiamo:

- Due sistemi di riferimento S ed S' con centro in O e O';
- Un punto P;

Le congiungenti tra:

- O ed il punto → r ;
- O' ed il punto → r' ;
- O ed O' → R ;

la velocità del punto P nel sistema di riferimento S di centro in O è data dalla formula:

$$v = v' + v_t$$

nella quale:

- v è la velocità del punto rispetto ad S;
- v' è la velocità del punto rispetto ad S';
- v_t è la velocità dei punti di S' rispetto ai punti di S ed è detta velocità di trascinamento.

DEFINIZIONE: MOTO RELATIVO DI TRASLAZIONE RETTILINEA → i due sistemi di riferimento si muovono su una retta l'uno rispetto all'altro. In questo caso si ha che:

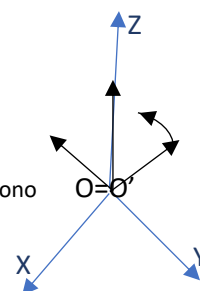
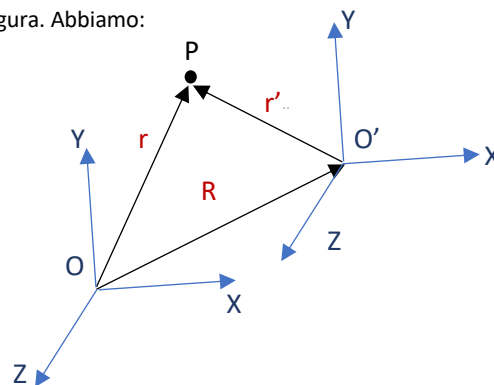
$$\begin{cases} v = v' + V_t \\ a = a' + a_t \end{cases}$$

DEFINIZIONE: EQUAZIONI DI TRASFORMAZIONE DI GALILEO → se tra le condizioni del caso precedente si aggiunge anche che la velocità con cui i due sistemi di riferimento si muovono deve essere costante allora si potranno usare le equazioni di trasformazione di Galileo:

$$\begin{cases} r = r' + V_t * t \\ v = v' + V_t \\ a = a' \end{cases}$$

DEFINIZIONE: MOTO RELATIVO DI ROTAZIONE → consideriamo l'esempio in figura: abbiamo due sistemi di riferimento S ed S' con il loro centro coincidente ed S' ruota attorno al suo centro. A causa di tale rotazione il moto relativo sarà caratterizzato da un'accelerazione che vedremo meglio in seguito.

DEFINIZIONE: MOTO RELATIVO DI ROTOTRASLAZIONE → è un moto formato dai due precedenti e ad esso possono essere ricondotti tutti i moti relativi.



Nella prossima dimostrazione sarà utile ricordare la formula $\left(\frac{dW}{dt}\right)_S = \left(\frac{dW}{dt}\right)_{S'} + \omega \times W$, dove ω è la velocità angolare e W è un generico vettore.

DIMOSTRAZIONE: TRASFORMAZIONE DELLE VELOCITÀ → consideriamo i due sistemi di riferimento S ed S' in figura. Possiamo descrivere il vettore velocità come:

$$v = \left(\frac{dr}{dt}\right)_S = \left(\frac{dR}{dt}\right)_S + \left(\frac{dr'}{dt}\right)_S$$

Le parentesi con il pedice S o S' indicano rispetto a quale sistema di riferimento è stata "osservata" la relazione al suo interno

Applicando la formula descritta ad inizio pagina su $\left(\frac{dr'}{dt}\right)_S$ si ottiene:

$$\left(\frac{dr'}{dt}\right)_S = \left(\frac{dr'}{dt}\right)_{S'} + \omega \times r'$$

e sostituendo nell'equazione iniziale:

$$v = \left(\frac{dR}{dt}\right)_S + \left(\frac{dr'}{dt}\right)_{S'} + \omega \times r'$$

Inoltre $r' = r - R$ per cui, sostituendo si ha:

$$v = \left(\frac{dR}{dt}\right)_S + \left(\frac{d(r-R)}{dt}\right)_{S'} + \omega \times (r - R)$$

E siccome $\left(\frac{d(r-R)}{dt}\right)_{S'} = v'$ e $\left(\frac{dR}{dt}\right)_S = v_t$ allora si giunge a:

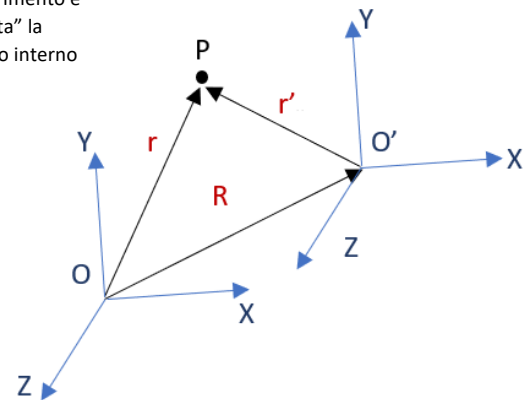
$$v = v' + v_t + \omega \times r'$$

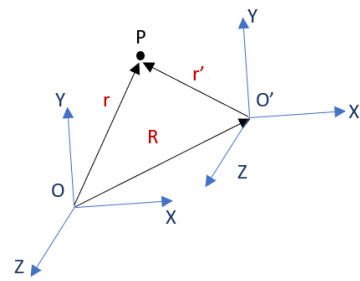
che è l'equazione della trasformazione delle velocità per sistemi di riferimento relativi. Ponendo inoltre $V(t) = \left(\frac{dR}{dt}\right)_S$ si ottiene l'equazione della velocità di trascinamento:

$$v_t = V(t) + \omega(t) \times [r(t) - R(t)]$$

Per comprendere meglio la funzione del termine ω analizziamo i diversi casi possibili:

- $\omega = 0 \rightarrow$ tutti i punti solidali ad S' si muovono alla stessa velocità rispetto ad S : vi è una traslazione;
- $\omega \neq 0 \rightarrow$ si hanno due sotto-casi:
 - o $O = O' \rightarrow$ la velocità di trascinamento è uguale alla velocità di rotazione;
 - o $O \neq O' \rightarrow$ la velocità di trascinamento sarà uguale a $v_t = V(t) + \omega(t) \times [r(t) - R(t)]$





Nella prossima dimostrazione sarà utile ricordare la formula $\left(\frac{dW}{dt}\right)_s = \left(\frac{dW}{dt}\right)_{s'} + \omega \times W$, dove ω è la velocità angolare e W è un generico vettore.

DMOSTRAZIONE: TRASFORMAZIONE DELLE ACCELERAZIONI → per ottenere la relazione che lega le accelerazioni nei diversi sistemi di riferimento partiamo dall'equazione delle velocità $v = v' + V_t + \omega \times r'$ dove $V_t = \left(\frac{dR}{dt}\right)_s$ e deriviamola:

$$a = \left(\frac{dv}{dt}\right)_s = \left(\frac{dv'}{dt}\right)_s + \left(\frac{d^2R}{dt^2}\right)_s + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)_s \times r' + \omega \times \left(\frac{dr'}{dt}\right)_s$$

Usando la formula ad inizio pagina otteniamo:

- $\left(\frac{dv'}{dt}\right)_s = \left(\frac{dv'}{dt}\right)_{s'} + \omega \times v'$ e siccome $\left(\frac{dv'}{dt}\right)_{s'} = a' \rightarrow \left(\frac{dv'}{dt}\right)_s = a' + \omega \times v'$
- $\omega \times \left(\frac{dr'}{dt}\right)_s = \omega \times \left[\left(\frac{dr'}{dt}\right)_{s'} + \omega \times r'\right]$ e siccome $\left(\frac{dr'}{dt}\right)_{s'} = v' \rightarrow \omega \times \left(\frac{dr'}{dt}\right)_s = \omega \times [v' + \omega \times r']$

Le parentesi con il pedice S o S' indicano rispetto a quale sistema di riferimento è stata "osservata" la relazione al suo interno

Sostituendo i termini ottenuti nell'equazione principale si ottiene:

$$a = a' + \omega \times v' + \left(\frac{d^2R}{dt^2}\right)_s + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)_s \times r' + \omega \times [v' + \omega \times r']$$

E siccome $r' = r - R$:

$$a = a' + \omega \times v' + \left(\frac{d^2R}{dt^2}\right)_s + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)_s \times (r - R) + \omega \times [v' + \omega \times (r - R)]$$

Da tale equazione, ponendo v' ed a' nulli, otteniamo

$$a_t = \left(\frac{d^2R}{dt^2}\right)_s + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)_s \times (r - R) + \omega \times [\omega \times (r - R)]$$

e siccome $\left(\frac{d^2R}{dt^2}\right)_s = A$ e $\left(\frac{d\omega}{dt}\right)_s = a_{ang}$ otteniamo:

$$a_t = A + a_{ang} \times (r - R) + \omega \times [\omega \times (r - R)]$$

Infine, definita l'accelerazione di Coriolis come $a_{co} = 2\omega \times v'$ si arriva all'equazione della trasformazione delle accelerazioni:

$$a = a' + a_t + a_{co}$$

DINAMICA

DEFINIZIONE: PRIMO PRINCIPIO DELLA DINAMICA (o di inerzia) → esistono infiniti sistemi di riferimento, detti inerziali, rispetto ai quali ogni punto materiale libero (ovvero su cui la risultante delle forze, se presenti, è uguale a 0) ha velocità costante.

Tale definizione è il risultato della ricerca di un sistema di riferimento assolutamente inerziale:

- Dapprima si era preso come sistema di riferimento inerziale la Terra. Questa è un'approssimazione tollerabile per la maggior parte dei problemi che trattiamo ma è facile intuire che la terra non è propriamente un sistema inerziale, visto che ruota attorno al sole e si muove nello spazio;
- Si è poi pensato di usare il sole come centro del sistema di riferimento assolutamente inerziale e le congiungenti con le stelle fisse come assi, tuttavia le stelle fisse sono in realtà galassie e sappiamo che le galassie sono in continuo allontanamento le une dalle altre per cui anche questo non è propriamente un sistema di riferimento inerziale;
- Si è infine pensato di usare la radiazione di fondo dell'universo per individuare il sistema di riferimento inerziale: tale radiazione presenta una anisotropia che rende possibile individuare un sistema di riferimento solidale alla radiazione di fondo. Questo è l'esempio più vicino che possediamo all'esatta definizione di sistema di riferimento, per cui chiamiamo il sistema di riferimento rispetto alla radiazione di fondo s_0 :
 - o Qualunque altro sistema di riferimento che si muove con velocità costante in s_0 è un sistema di riferimento inerziale, ed essendo infiniti i punti dell'universo che si muovono di velocità costante rispetto ad esso esistono allora infiniti sistemi di riferimento inerziali.

DEFINIZIONE: PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE → le forze si sommano tra loro come vettori.

DEFINIZIONE: SECONDO PRINCIPIO DELLA DINAMICA → in un sistema di riferimento inerziale ogni volta che un corpo subisce un'accelerazione esiste sempre (almeno) una forza responsabile di tale variazione di velocità. La relazione che vige in ogni istante tra la forza e l'accelerazione da essa causata è:

$$F = m * a(t)$$

DEFINIZIONE: TERZO PRINCIPIO DELLA DINAMICA (o principio di azione-reazione) → dati due corpi A e B, se A esercita una forza su B allora B esercita una forza su A e viceversa. Tali forze sono caratterizzate da:

- Stessa intensità;
- Direzione sulla retta congiungente i punti di applicazione delle due forze;
- Verso opposto;

$$m_A * a_A = m_B * a_B \rightarrow \frac{m_A}{m_B} = \frac{a_B}{a_A}$$

DEFINIZIONE: MASSA INERZIALE → la massa inerziale è una grandezza dipendente non dalla forma del corpo ma dalla "quantità di materia" in esso contenuta. È definita inerziale perché si oppone al moto: a parità di forza l'accelerazione ottenuta applicando tale forza su un corpo di massa elevata sarà minore di quella ottenuta applicando la stessa forza su un corpo di massa minore.

DEFINIZIONE: CAMPO DI FORZE CENTRALE A SIMMETRIA SFERICA → un campo di forze si dice:

- Centrale → se in ogni punto del campo la forza agente su una particella ha direzione parallela alla congiungente del punto occupato dalla particella col centro del campo;
- A simmetria sferica → se il modulo di tale forza dipende soltanto dalla distanza col centro del campo.

Un corpo con densità a simmetria sferica (ovvero che aumenta avvicinandosi al centro di massa) genera un campo di forze pari a quello che genererebbe un punto materiale della stessa massa posizionato al suo centro.

DEFINIZIONE: FORZA APPARENTE → una forza apparente è una forza che si manifesta per un osservatore che si trova in un sistema di riferimento non inerziale e che non viene osservata invece da un punto di vista solidale con un sistema di riferimento inerziale. Le forze apparenti esprimono il cambiamento delle leggi della dinamica nei sistemi di riferimento non inerziali.

DEFINIZIONE: VELOCITA' AREOLARE → con velocità areolare si intende un vettore avente:

- o Direzione perpendicolare al piano del moto;
- o Modulo uguale alla velocità con cui il vettore posizione r spazza l'area del piano;
- o Verso tale da veder ruotare r in senso antiorario (usare la regola della mano destra).

Vedremo tra poco che tale grandezza si conserva nei moti centrali.

DEFINIZIONE: QUANTITA' DI MOTO → In fisica la quantità di moto è definita come: $q = m * v$.

DEFINIZIONE: IMPULSO → nota l'azione di una forza rispetto al tempo, l'impulso è dato dall'integrale rispetto al tempo della forza:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} F dt$$

Nota tale definizione, è possibile esprimere il primo principio della dinamica come:

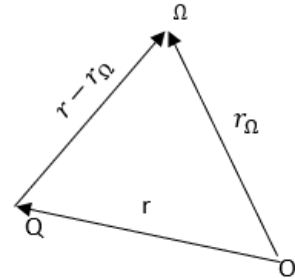
- Esistono infiniti sistemi di riferimento nei quali la quantità di moto dei corpi sui quali la risultante delle forze è = 0 rimane costante.

Ed il secondo principio della dinamica come:

- In un sistema di riferimento inerziale ogni volta che la quantità di moto di un corpo cambia è presente (almeno) una forza che ha causato tale cambiamento:

$$F = \frac{dq}{dt}$$

Derivata della quantità di moto



DIMOSTRAZIONE: TEOREMA DELL'IMPULSO → il teorema dell'impulso afferma che l'impulso è uguale alla variazione della quantità di moto. Dimostriamo:

- Come già detto, l'equazione dell'impulso è $I = \int_{t_0}^{t_1} F dt$. Sappiamo anche che $F = \frac{dq}{dt}$. Sostituendo la seconda equazione nella prima otteniamo:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dq}{dt} dt$$

- Eliminando i due dt si ottiene:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} dq \rightarrow I = q(t_1) - q(t_0) \rightarrow I = \Delta q$$

DEFINIZIONE: MOMENTO ANGOLARE: il momento angolare è il momento della quantità di moto e la sua equazione è:

$$P_{\Omega} = (r - r_{\Omega}) \times q$$

Momento angolare rispetto ad un polo Ω Segmento che congiunge il polo Ω con il punto materiale

Quantità di moto

DIMOSTRAZIONE: MOMENTO DELLE FORZE: è l'equivalente rotazionale del concetto di forza. Per calcolarne l'equazione è necessario:

- Derivare il momento angolare:

$$P_{\Omega} = (r - r_{\Omega}) \times q \rightarrow \frac{dP_{\Omega}}{dt} = \frac{d(r - r_{\Omega})}{dt} \times q + (r - r_{\Omega}) \times \frac{dq}{dt}$$

- Sappiamo per il secondo principio della dinamica che $\frac{dq}{dt} = F$ per cui l'equazione diventa:

$$\frac{dP_{\Omega}}{dt} = \frac{d(r - r_{\Omega})}{dt} \times q + (r - r_{\Omega}) \times F$$

- Si ha inoltre che $\frac{d(r - r_{\Omega})}{dt}$ è uguale alla differenza delle velocità rispetto al polo e rispetto al centro del sistema di riferimento. Tuttavia questa grandezza è moltiplicata vettorialmente per q , e siccome i due vettori sono paralleli e il prodotto vettoriale di due vettori paralleli è = 0 di ha che:

$$\frac{dP_{\Omega}}{dt} = (r - r_{\Omega}) \times F = m_{forze}$$

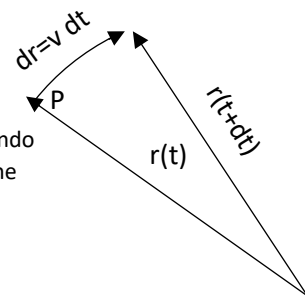
Abbiamo ottenuto quindi che il momento delle forze è uguale a $m_{forze} = (r - r_{\Omega}) \times F$ e che lo si può ottenere derivando il momento angolare rispetto al tempo.

DEFINIZIONE: TEOREMA DEL MOMENTO DELL'IMPULSO → dato che, come visto nella precedente dimostrazione, il momento delle forze è uguale alla derivata rispetto al tempo del momento angolare, si può dire che:

$$p = \int_{t_0}^{t_1} m_{\Omega}(t) dt$$

Dal teorema del momento dell'impulso è possibile dedurre altre 3 importanti nozioni:

- **DIMOSTRAZIONE: CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE NEI MOTI CENTRALI** → come detto $p = \int_{t_0}^{t_1} m_{\Omega}(t) dt$. Ricordando che il momento delle forze $m_{\Omega} = (r - r_{\Omega}) \times F$, se tale momento è =0 allora possiamo dedurre che il momento angolare è costante. Nei moti centrali a simmetria sferica in ogni momento le forze applicate sul corpo sono parallele al vettore posizione dal centro del campo di forze, per cui $m_{\Omega} = (r - r_{\Omega}) \times F = 0$ (visto che il prodotto vettoriale di due vettori paralleli è nullo). Per tale motivo possiamo concludere che il momento angolare nei moti centrali a simmetria sferica si conserva.
- **DIMOSTRAZIONE: I MOTI CENTRALI SONO PIANI** → consideriamo un moto centrale a simmetria sferica con polo Ω nel centro del campo di forze. Per la conservazione del momento angolare si ha che $P_{\Omega} = (r - r_{\Omega}) \times q = \text{cost}$ per cui anche il piano su cui si trovano r e q , cui P_{Ω} è perpendicolare, rimane costante. Il piano formato da r e q è lo stesso su cui si muove la particella, per cui tale moto (in assenza di forze esterne) è piano.
- **DIMOSTRAZIONE: LA VELOCITA' AREOLARE NEI MOTI CENTRALI SI CONSERVA** → ricordando che il modulo della velocità areolare è uguale alla velocità con la quale il vettore posizione r spazza l'area del piano, ed essendo tale area uguale a quella del triangolo qui a destra, abbiamo che:



$$dA = \frac{|r \times dr|}{2} = \frac{|r \times v| dt}{2}$$

E di conseguenza

$$\sigma = \frac{dA}{dt} = \frac{|r \times v|}{2}$$

Moltiplicando numeratore e denominatore per m e ricordando che $P_{\Omega} = (r - r_{\Omega}) \times q$ e che $q = m * v$ si ottiene:

$$\sigma = \frac{|rv| * m}{2 * m} \rightarrow \sigma = \frac{r \times q}{2m} \rightarrow \sigma = \frac{p}{2m}$$

Nell'uguaglianza $\sigma = \frac{p}{2m}$ p è (come dimostrato precedentemente) costante, m è costante per cui anche σ sarà costante nei moti centrali.

DEFINIZIONE: FORZE DI ATTRITO → si rileva sperimentalmente che se spingiamo un corpo su un piano questo rallenterà fino a fermarsi. Ciò fa intuire che il piano applica una qualche forza che si oppone al moto (oltre che la reazione vincolare). Andando ad analizzare più approfonditamente possiamo rilevare due tipologie di forze che il piano applica su un corpo che si muove su di esso:

- **ATTRITO STATICO**: prendiamo in considerazione un corpo fermo. Se applichiamo su di esso una forza lieve esso non si sposterà, vi sarà quindi una forza, detta attrito statico, che si oppone al moto compensando la forza da noi applicata. Aumentando gradualmente la forza applicata si vedrà che aumenterà anche la forza di attrito statico (il corpo rimane fermo per cui $F_{attrito} = F$). Si arriva poi ad un punto massimo del valore della forza applicabile, oltre il quale il corpo inizia a muoversi. Solitamente tale limite è dato da:

$$F_{attr.stat.}^{max} = \mu_s * R_n$$

dove R_n è la reazione vincolare del piano.

dove R_n è la reazione vincolare del piano. Ad entrare in contatto sono in realtà poche microscopiche punte sulle quali agisce una pressione molto alta che fa sì che queste si fondano tra loro generando appunto l'attrito. Per far muovere un corpo che si trova fermo su un piano è quindi necessario rompere i legami tra le punte che si sono saldate e per questo c'è bisogno di una determinata forza.

- **ATTRITO DINAMICO**: dopo aver rotto i legami tra le punte saldate tra corpo e piano il corpo si mette in movimento. Tuttavia tale movimento è ostacolato da una seconda forza simile alla precedente. Questo perché i legami tra le punte delle superfici a contatto tra piano e corpo si continuano a formare ed è necessario romperli per continuare a mantenere il corpo in moto. Il numero di tali punte è però inferiore ed infatti la forza di attrito dinamico è generalmente più lieve di quella di attrito statico.

$$F_{attr.din.}^{max} = \mu_s * R_n$$

dove R_n è la reazione vincolare del piano.

DIMOSTRAZIONE: LA FORZA DI ATTRITO NON DIPENDE DALLA GRANDEZZA DELLA SUPERFICIE DI CONTATTO → come detto, quando un oggetto è posto su un piano scabro, ad entrare in contatto sono in realtà poche microscopiche punte sulle quali agisce una pressione molto alta che fa sì che queste si fondano tra loro generando appunto l'attrito. Il numero di tali fusioni tra punte è proporzionale all'area della superficie di contatto mentre l'ampiezza di tali punti di contatto è proporzionale alla pressione, che è uguale a

$$p = \frac{R_n}{S}$$

Effettuando il prodotto tra le due grandezze si ottiene la superficie di contatto effettivo che sarà quindi uguale a

$$S_{\text{contatto effettivo}} = \frac{R_n}{S} * S = R_n$$

LAVORO ED ENERGIA

DEFINIZIONE: LAVORO DI UNA FORZA → il lavoro di una forza è definito come l'integrale della forza stessa nell'intervallo di tempo.

DIMOSTRAZIONE: FORMULA DEL LAVORO → per ricavare la formula del lavoro nel caso più generale consideriamo dapprima il caso specifico di una forza costante sia nello spazio che nel tempo applicata ad un punto che si muove di moto rettilineo per un tratto AB. Si avrà allora che:

$$L_{AB} = F * AB \rightarrow L_{AB} = F * (r_b - r_a) \rightarrow L_{AB} = F * \Delta r$$

Dividiamo ora lo spostamento Δr in tanti infinitesimi spostamenti Δr_i sufficientemente piccoli da poter considerare la forza in essi costante. Si ha allora che:

$$L_{AB} = \sum_i F(r_i) * \Delta r_i$$

Calcoliamo il valore della precedente espressione per $\Delta r \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta r_i \rightarrow 0} L_{AB} = \lim_{\Delta r_i \rightarrow 0} \sum_i F(r_i) * \Delta r_i \rightarrow \delta L = F * dr_i$$

Per cui infine si ottiene che:

$$L_{AB} = \int_A^B F * dr$$

ENUNCIATO: TEOREMA DELLE FORZE VIVE → Il teorema dell'energia cinetica (o teorema delle forze vive) afferma che se un corpo possiede un'energia cinetica iniziale e una forza agisce su di esso effettuando un lavoro, l'energia cinetica finale del corpo è uguale alla somma dell'energia cinetica iniziale e del lavoro compiuto dalla forza lungo la traiettoria del moto.

DIMOSTRAZIONE: TEOREMA DELLE FORZE VIVE (o dell'energia cinetica) → il teorema delle forze vive afferma che il lavoro delle forze applicate su un corpo è uguale alla variazione della sua energia cinetica. Dimostriamo:

- Consideriamo un corpo di massa m , schematizzabile come puntiforme, sul quale agiscono delle forze la cui risultante è F .
- Consideriamo uno spostamento infinitesimo di tale corpo:

$$\delta L = F * dr$$

- Per il secondo principio della dinamica $F = m * a$, per cui il lavoro sul tratto infinitesimo dr sarà uguale a:

$$\delta L = m * a * dr$$

- dr è inoltre uguale a $v * dt$ per cui si ha:

$$\delta L = m * a * v * dt$$

- Sostituendo a v ed a le loro espressioni intrinseche (vettore velocità e accelerazione scomposti nelle direzioni tangente e perpendicolare alla traiettoria) si ottiene:

$$\delta L = m * \left(\ddot{s} * u_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho} * u_n \right) * (\dot{s} * u_t) * dt \rightarrow \delta L = m * \ddot{s} * \dot{s} * dt$$

- consideriamo ora l'energia cinetica $E_c = \frac{1}{2} * m * v^2$ su un tratto infinitesimo di curva.
Si ha che:

$$E_c = \frac{1}{2} * m * \dot{s}^2 \rightarrow dE_c = m * \dot{s} * \dot{s}$$

- Per cui sul tratto infinitesimo:

$$\delta L = dE_c$$

- Ed integrando lungo la curva si ottiene

$$\int_A^B \delta L = \int_A^B dE_c \rightarrow L_{A \rightarrow B} = E_{cB} - E_{cA}$$

Rimangono solo m e la derivata prima e seconda dello spazio perché il prodotto tra due vettori (e quindi anche tra due versori) ortogonali è uguale a 0 per cui $\frac{\dot{s}^2}{\rho} * u_n * (\dot{s} * u_t)$ è uguale a 0

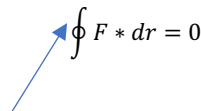
DEFINIZIONE: CAMPI DI FORZE CONSERVATIVI → di norma il lavoro di una forza è dipendente dal percorso che tale forza fa compiere al corpo su cui è applicata. Vi sono però dei tipi particolari di forze, dette conservative, per le quali il lavoro dipende solo dal punto iniziale e da quello finale del percorso. Affinchè una forza sia conservativa è necessario che valga l'uguaglianza

$$\delta L = -dE_p$$

dove E_p è l'energia potenziale. Tale uguaglianza indica che il lavoro elementare è un differenziale esatto. Integrando poi lungo la curva si ottiene che:

$$\int_A^B \delta L = - \int_A^B dE_p \rightarrow L_{A \rightarrow B} = E_{p_A} - E_{p_B} = \Delta V$$

da cui si deduce che il lavoro dipende solo dai valori V_B e V_A assunti dal corpo agli estremi del percorso e non dal percorso stesso. Si può inoltre affermare che il lavoro di una forza conservativa su una linea chiusa è uguale a 0:



$$\oint F \cdot dr = 0$$

l'integrale lungo una linea chiusa è detto Circuitazione

La forza di attrito è quindi indipendente dalla superficie.

Per verificare che una forza è conservativa si può usare anche la proprietà secondo cui il rotore di una forza conservativa è nullo:

$$\nabla \times F = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{bmatrix} = 0$$

DIMOSTRAZIONE: CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA → nelle precedenti dimostrazioni abbiamo descritto il lavoro delle forze conservative come:

$$\begin{cases} \delta L = -dE_p \\ \delta L = dE_c \end{cases}$$

Se tutte le forze sono conservative il lavoro elementare totale è dato da:

$$\delta L = \sum_i -dE_{p_i} \rightarrow \delta L = -d \sum_i E_{p_i} \rightarrow \delta L = -dE_p$$

per cui possiamo scrivere che:

$$dE_c = -dE_p \rightarrow d(E_c + E_p) = 0$$

Ed infine integrando si ha che:

$$E_c + E_p = \text{cost.}$$

$E_c + E_p$ viene chiamata Energia Meccanica e come dimostrato, se il sistema è composto da sole forze conservative, è una grandezza che si conserva: $dE_m = 0$

Se invece il campo di forze è composto da alcune forze non conservative si ha che:

- Come detto $\delta L = dE_c$, e siccome $\delta L = \delta L_{non\ cons.} + \delta L_{conserv.}$ si ha che:

$$dE_c = \delta L \rightarrow dE_c = \delta L_{non\ cons.} + \delta L_{conserv.}$$

- Ricordando che il lavoro delle forze conservative è uguale a - differenza di energia potenziale di ha che:

$$dE_c = \delta L_{non\ cons.} - dE_p \rightarrow dE_c + dE_p = \delta L_{non\ cons.} \rightarrow d(E_c + E_p) = \delta L_{non\ cons.}$$
- E siccome $E_c + E_p = E_m$ si ha che:

$$dE_m = \delta L_{non\ cons.}$$

DEFINIZIONE: POTENZA → la potenza è una grandezza che misura la quantità di lavoro compiuto da una determinata macchina in un intervallo di tempo:

$$W = \frac{\delta L}{dt} = \frac{F * dr}{dt} = F * v$$

DEFINIZIONE: PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA → in un sistema isolato la somma di tutte le energie, in qualunque forma essere compaiano, è costante.

DINAMICA DEI SISTEMI

DEFINIZIONE: CENTRO DI MASSA → è il punto dove può essere considerata contenuta tutta la massa di un corpo. Dato un sistema formato da n punti materiali di massa m_i situati in diverse posizioni r_i (con i che va da 1 a n), la posizione del centro di massa di tale sistema si trova tramite l'equazione:

$$X_{C_m} = \frac{m_1 * r_1 + m_2 * r_2 + m_3 * r_3 * \dots + m_n * r_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n}$$

La sua velocità si trova invece come:

$$V_{C_m} = \frac{v_1 * m_1 + v_2 * m_2 + v_3 * m_3 * \dots + v_n * m_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n}$$

Infine l'accelerazione del centro di massa si trova con l'equazione:

$$a_{C_m} = \frac{a_1 * m_1 + a_2 * m_2 + a_3 * m_3 * \dots + a_n * m_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n}$$

DIMOSTRAZIONE: PRIMO TEOREMA DEL CENTRO DI MASSA → Analizziamo:

- La quantità di moto a partire dai punti materiali formanti il sistema di particelle: nei sistemi di particelle, la quantità di moto è il vettore somma di tutte le quantità di moto delle particelle del sistema stesso:

$$Q = \sum_i q_i \rightarrow Q = \sum_i m_i * v_i$$

al tendere all'infinito dei punti del sistema la sommatoria diventa integrale:

$$Q = \int v * dm$$

- La quantità di moto a partire dal centro di massa: la quantità di moto del centro di massa sarà data dalla sua massa per la sua velocità, per cui, ricordando che $V_{C_m} = \frac{v_1 * m_1 + v_2 * m_2 + v_3 * m_3 * \dots + v_n * m_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n}$ si ha che:

$$Q = M * V_c \rightarrow Q = M * \frac{v_1 * m_1 + v_2 * m_2 + v_3 * m_3 * \dots + v_n * m_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n}$$

Semplificando M (la somma di tutte le masse al denominatore dà M) si ottiene:

$$Q = \sum_i m_i * v_i$$

I risultati ottenuti mostrano il fatto che, nel calcolo della quantità di moto, è possibile considerare il sistema come racchiuso in un punto materiale nel centro di massa con:

- Massa= M;
- Velocità= V_c .

DEFINIZIONE: SECONDO TEOREMA DEL CENTRO DI MASSA → la somma delle forze esterne è data dal prodotto della somma delle masse per l'accelerazione del centro di massa.

$$F_{esterne} = M * a_c$$

DEFINIZIONE: CONSERVAZIONE DELLA QUANTITA' DI MOTO NEI SISTEMI DI PARTICELLE → se un sistema di particelle è isolato su di esso non agiranno forze e di conseguenza la quantità di moto totale del sistema rimarrà costante (nonostante le singole quantità di moto delle particelle costituenti il sistema potrebbero variare).

DIMOSTRAZIONE: PRIMA EQUAZIONE DELLA DINAMICA DEI SISTEMI→ la prima equazione della dinamica dei sistemi afferma che la somma delle forze esterne al sistema di particelle è dato dalla derivata rispetto al tempo della quantità di moto. Dimostriamo:

- Consideriamo l'equazione della quantità di moto nei sistemi di particelle $Q = \sum_i q_i$ e deriviamo rispetto al tempo:

$$\frac{dQ}{dt} = \sum_i \frac{dq_i}{dt}$$

- Per il secondo principio della dinamica espresso con la quantità di moto (ovvero $F = \frac{dq}{dt}$) possiamo sostituire alla derivata delle quantità di moto le forze agenti sulle particelle del sistema:

$$\frac{dQ}{dt} = \sum_i F$$

- Tali forze si dividono in $F = F_{interne} + F_{esterne}$:

$$\frac{dQ}{dt} = \sum_i F_{i\text{interna}} + F_{i\text{esterna}}$$

- Per il principio di azione-reazione (terzo principio della dinamica) la sommatoria delle forze interne $\sum_i F_{i\text{interna}} = 0$ per cui l'equazione diventa:

$$\frac{dQ}{dt} = \sum_i F_{i\text{esterna}} = F_{esterne}$$

- Per cui la derivata della quantità di moto di un sistema di particelle è uguale alla somma delle forze esterne agenti su tale sistema.

DIMOSTRAZIONE: SECONDA EQUAZIONE DELLA DINAMICA DEI SISTEMI → La seconda equazione della dinamica dei sistemi afferma che il momento delle forze esterne agenti sul sistema è uguale alla derivata del momento angolare del sistema. Dimostriamo:

Premesse:

- per un sistema di particelle, il momento angolare totale è la somma di tutti i momenti angolari delle singole particelle:

$$P_{sistema} = \sum_i (r_i - r_{\Omega}) \times q_i = \sum_i P_i$$

- tendere all'infinito delle particelle formanti il sistema si ha che:

$$P_{sistema} = \int (r_i - r_{\Omega}) \times dq_i$$

- E siccome $q = m * v$ possiamo scrivere:

$$P_{sistema} = \int (r_i - r_{\Omega}) \times v_i * dm_i$$

Possiamo a questo punto estendere il secondo principio della dinamica, già analizzato nel caso di corpi puntiformi, ai sistemi di particelle:

- Deriviamo il momento angolare del sistema:

$$P_{\Omega sistema} = \sum_i P_{\Omega i} \rightarrow \frac{dP_{\Omega sistema}}{dt} = \frac{d \sum_i P_{\Omega i}}{dt} \rightarrow \frac{dP_{\Omega sistema}}{dt} = \sum_i \frac{dP_{\Omega i}}{dt}$$

- Sapendo che $P_{\Omega} = (r_i - r_{\Omega}) \times q_i$, sostituiamo nell'equazione ottenendo:

$$\frac{dP_{sistema}}{dt} = \sum_i \frac{d[(r_i - r_{\Omega}) \times q_i]}{dt}$$

$r_i - r_{\Omega}$ rappresenta lo spazio, per cui la sua derivata è la velocità

- Effettuando la derivata presente nell'equazione si ottiene:

$$\frac{dP_{sistema}}{dt} = \sum_i (r_i - r_{\Omega}) \times \frac{dq_i}{dt} - \sum_i v_{\Omega} \times q_i$$

- Sappiamo che, per il secondo principio della dinamica espresso tramite la quantità di moto, $\frac{dq_i}{dt} = F_i$ per cui:

$$\frac{dP_{sistema}}{dt} = \sum_i (r_i - r_{\Omega}) \times F_i - \sum_i v_{\Omega} \times q_i$$

- $(r_i - r_{\Omega}) \times F_i$ è uguale al momento delle forze sulle singole particelle, per cui:

$$\frac{dP_{sistema}}{dt} = \sum_i M_{forze_i} - \sum_i v_{\Omega} \times q_i \rightarrow \frac{dP_{sistema}}{dt} = \sum_i M_{forze_i} - v_{\Omega} \times q_i$$

- Effettuando la sommatoria si ottiene:

$$\frac{dP_{sistema}}{dt} = M_{forze_{ris.}} - v_{\Omega} \times Q_{ris.}$$

- La quantità di moto può essere scritta come $q = m * v_{c.m.}$ per cui si ottiene:

$$\frac{dP_{sistema}}{dt} = M_{forze_{ris.}} - v_{\Omega} * m_{tot.} \times v_{c.m.}$$

- il momento delle forze risultanti può essere espresso come $M_{forze_{ris.}} = M_{forze_{int.}} + M_{forze_{est.}}$. Come detto precedentemente le forze interne al sistema hanno risultante nulla (per il principio di azione-reazione) per cui anche il momento di tali forze sarà nullo. Si ha quindi che:

$$\frac{dP_{sistema}}{dt} = M_{forze_{est.}} - v_{\Omega} \times m_{tot.} * v_{c.m.}$$

- v_{Ω} e $v_{c.m.}$ sono parallele per cui il loro prodotto è nullo. Si ottiene quindi:

$$\frac{dP_{sistema}}{dt} = M_{forze_{est.}}$$

Che è la seconda equazione della dinamica dei sistemi.

DEFINIZIONE: EQUAZIONI CARDINALI → la prima e la seconda equazione della dinamica rappresentano le cosiddette equazioni cardinali (anche dette equazioni cardinali della meccanica):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dP_{sistema}}{dt} = M_{forze_{est.}} \\ \frac{dQ}{dt} = F_{esterne} \end{array} \right.$$

DIMOSTRAZIONE: PRIMO TEOREMA DI KÖNIG (o teorema di König per il momento angolare) → Il primo teorema di König afferma che il momento angolare di un sistema qualsiasi è la somma tra il momento angolare dovuto al moto del centro di massa e il momento angolare del sistema riferito ad esso ed è una grandezza intrinseca del sistema di particelle non dipendente dal sistema di riferimento scelto.

Per dimostrare ciò consideriamo due sistemi di riferimento, uno chiamato S ed un altro chiamato S', entrambi con centro O coincidente col centro di massa:

- Sappiamo che rispetto ad O vale l'uguaglianza:

$$P'_O = \sum_i r'_i \times q'_i$$

- Ricordando che $r'_i = r_i - r_o$ e che $q'_i = m_i * v'_i$ possiamo scrivere:

$$P'_O = \sum_i (r_i - r_o) \times m_i * v'_i$$

- La velocità rispetto al polo O è uguale a $v'_i = (v_i - v_o)$ per cui:

$$P'_O = \sum_i (r_i - r_o) \times m_i * (v_i - v_o)$$

- Effettuando la moltiplicazione tra m_i e le due velocità si ottiene:

$$P'_O = \sum_i (r_i - r_o) \times m_i * v_i - \sum_i (r_i - r_o) \times m_i * v_o = P_O$$

- Abbiamo quindi ottenuto che dati due sistemi di riferimento con centro O nel centro di massa, il valore ottenuto calcolando il momento angolare nei due sistemi è lo stesso. Da ciò si deduce che per qualunque sistema di riferimento il momento angolare di un sistema di particelle si può calcolare come:

$$P_O = P'_C + r_c \times Q$$

Ovvero come la somma tra il momento angolare del sistema rispetto al suo centro di massa + il momento angolare del centro di massa rispetto al sistema di riferimento scelto.

DIMOSTRAZIONE: SECONDO TEOREMA DI KÖNIG (o teorema di König per l'energia cinetica) → il teorema di König afferma che l'energia cinetica di un sistema di particelle è sempre scrivibile come la somma tra un termine K' calcolato come l'energia cinetica in un sistema di riferimento con centro nel sistema di particelle e un termine $k = \frac{1}{2} * m * v^2$ calcolato come l'energia cinetica che avrebbe un corpo puntiforme di massa pari alla massa totale del sistema coincidente con il centro di massa del sistema stesso (in pratica K' è l'energia cinetica delle particelle rispetto al centro di massa del sistema mentre K è l'energia cinetica del centro di massa rispetto al sistema di riferimento scelto). Dimostriamo l'enunciato:

- Sappiamo che per un punto materiale l'energia cinetica è definita come:

$$K = \frac{1}{2} * m * v^2$$

Per cui per un sistema di particelle l'energia cinetica è data dalla somma delle energie cinetiche:

$$K = \sum_i \frac{1}{2} * m_i * v_i^2$$

- Ricordando che $v_i = (v'_i + v_c)$ si ottiene:

$$K = \sum_i \frac{1}{2} * m_i * (v'_i + v_c)^2 \rightarrow K = \sum_i \frac{1}{2} * m_i * (v_i'^2 + v_c^2 + v'_i * v_c)$$

- E moltiplicando per le varie velocità si ottiene:

$$K = \sum_i \left(\frac{1}{2} * m_i * v_i'^2 \right) + \frac{1}{2} * m_{tot} * v_c^2 + \sum_i \left(\frac{1}{2} * m_i * v'_i * v_c \right)$$

- L'ultimo termine $\sum_i \left(\frac{1}{2} * m_i * v'_i * v_c \right) = 0$ per cui:

$$K = \sum_i \left(\frac{1}{2} * m_i * v_i'^2 \right) + \frac{1}{2} * m_{tot} * v_c^2$$

Dove appunto $\sum_i \left(\frac{1}{2} * m_i * v_i'^2 \right) = K'$ rappresenta l'energia cinetica delle particelle rispetto al centro di massa mentre $\frac{1}{2} * m_{tot} * v_c^2$ rappresenta l'energia cinetica del centro di massa rispetto al sistema di riferimento da noi scelto.

Sostituendo i valori corrispondenti otteniamo infine:

$$K = K' + \frac{1}{2} * m_{tot} * v_c^2$$

CORPI RIGIDI

DEFINIZIONE: MOMENTO DI INERZIA → Il momento di inerzia è l'equivalente rotazionale della massa inerziale. Esso si calcola

- Per i punti materiali → $I = m * r^2$
- Per i corpi rigidi → $I = \sum_i m * r_i^2$

DEFINIZIONE: TEOREMA DI HUYGENS-STEINER → il teorema di Huygens-Steiner afferma che Il momento d'inerzia rispetto ad un asse a , parallelo ad un altro c passante per il centro di massa, si ottiene sommando al momento di inerzia iniziale rispetto a c il prodotto tra la massa del corpo stesso e il quadrato della distanza tra gli assi c ed a :

$$I = \sum_i m * r_i^2 + m * R^2$$

Dove $\sum_i m * r_i^2$ è il momento di inerzia rispetto all'asse passante per il centro di massa mentre R^2 è la distanza tra tale asse e quello da noi scelto.

GRAVITAZIONE

DEFINIZIONE: LEGGE DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE → la legge che descrive l'attrazione gravitazionale tra due corpi è

$$F = G * \frac{m_1 * m_2}{r^2}$$

Dove m_1 ed m_2 sono le masse dei due corpi mentre r è la distanza tra i loro centri di massa.

MECCANICA DEI FLUIDI

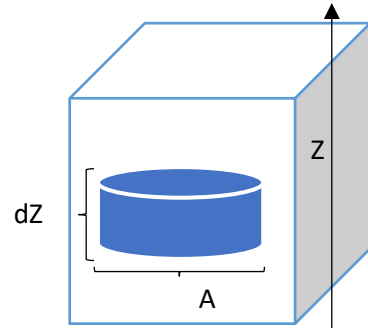
DEFINIZIONE: PRESSIONE → La pressione è una grandezza fisica intensiva (proprietà intensive sono quelle proprietà il cui valore non dipende dalla quantità di materia o dalle dimensioni del campione,^[1] ma soltanto dalla sua natura e dalle condizioni nelle quali si trova). È definita come il rapporto tra il modulo della forza agente ortogonalmente su una superficie e la sua area.

DIMOSTRAZIONE: EQUAZIONE DELLA STATICA DEI FLUIDI

Dato un fluido, prendiamo in considerazione una sua porzione molto piccola, per esempio di forma cilindrica, e analizziamo le forze che agiscono su di essa:

- Le forze perpendicolari all'asse Z dovute alla pressione esercitata dal fluido esterno. Tali forze si annullano tra loro come è intuibile dalla simmetria del cilindro rispetto all'asse z;
- Le forze parallele all'asse Z sono invece:
 - o Peso del fluido interno;
 - o Forza agente dal fluido esterno sulla base superiore;
 - o Forza agente dal fluido esterno sulla base inferiore.

Le ultime due forze citate sono opposte e se non ci fosse la forza peso la pressione avrebbe lo stesso valore in tutto il fluido indipendentemente dalla quota e tale valore dipenderebbe soltanto dalle due pressioni superiore e inferiore esercitate dal fluido esterno.



Accertato quindi che la pressione cambia a seconda della quota e dati:

- $-\rho * g * A * dz = F_{p. \text{ interna }}$
- $p(z) * A = F_{p. \text{ esterna sup. }}$
- $p(z + dz) * A = F_{p. \text{ esterna inf. }}$

possiamo scrivere:

$$-\rho * g * A * dz + p(z) * A - p(z + dz) * A = 0$$

I valori della pressione possono essere messi in relazione sviluppando in serie di Taylor la pressione nel punto $z + dz$ ottenendo che:

$$p(z + dz) \approx p(z) + \left(\frac{dp}{dz}\right)_z dz$$

Sostituendo a $p(z + dz)$ il valore trovato si ottiene:

$$-\rho * g * A * dz + p(z) * A - \left[p(z) + \left(\frac{dp}{dz}\right)_z dz\right] * A = 0$$

Effettuiamo le moltiplicazioni necessarie:

$$-\rho * g * A * dz + p(z) * A - p(z) * A - \left(\frac{dp}{dz}\right)_z dz * A = 0 \rightarrow -\rho * g * A * dz - \left(\frac{dp}{dz}\right)_z dz * A = 0$$

Semplifichiamo dz ed A ottenendo:

$$-\rho * g - \left(\frac{dp}{dz}\right)_z = 0 \rightarrow \frac{dp}{dz} = -\rho * g$$

Che è l'equazione della statica dei fluidi.

È possibile scrivere tale equazione mediante il gradiente della pressione:

$$\nabla p = \rho * g$$

Con ∇p che è il gradiente della pressione ed è uguale a:

$$\nabla p = \left(0, 0, \frac{\partial p}{\partial z}\right)$$

DIMOSTRAZIONE: LEGGE DI STEVINO

Partiamo dall'equazione $\frac{dp}{dz} = -\rho * g$ precedentemente trovata: nel caso dei fluidi che solitamente vengono schematizzati per i problemi dove si assume che la densità ρ sia uguale in tutti i punti del fluido è semplice integrare tale uguaglianza, che diventa:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho * g \rightarrow dp = -\rho * g * dz \rightarrow \int_{p_1}^{p_2} dp = \int_{z_1}^{z_2} -\rho * g * dz \rightarrow p_2 - p_1 = -\rho * g * (z_2 - z_1)$$

Dove si nota che:

- I punti che si trovano alla stessa quota sono caratterizzati dalla stessa pressione;
- La variazione di pressione è data dal prodotto $-\rho * g * (z_2 - z_1)$;

dalle precedenti considerazioni possiamo dedurre che, indicando con p_0 il valore della pressione alla superficie libera (quella a contatto con l'aria per intenderci, solitamente p_0 è la pressione atmosferica) e con p il valore della pressione alla profondità $(z_2 - z_1) = H$ possiamo scrivere che:

$$p = p_0 + \rho * g * H$$

che è la legge di Stevino. In tale legge il termine $\rho * g * H$ è detto pressione idrostatica.

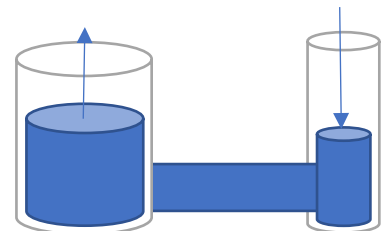
DIMOSTRAZIONE: LEGGE DI PASCAL → Il principio di Pascal o legge di Pascal è una legge della fisica dei fluidi che stabilisce che, quando avviene un aumento nella pressione in un punto di un fluido confinato, tale aumento viene trasmesso anche ad ogni punto del fluido all'interno del contenitore con la stessa intensità ma in direzione sempre perpendicolare alla parete del contenitore sulla quale il fluido esercita la pressione. Per dimostrare tale legge è sufficiente integrare l'equazione della statica dei fluidi:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho * g \rightarrow dp = -\rho * g * dz \rightarrow \int_{p_1}^{p_2} dp = \int_{z_1}^{z_2} -\rho * g * dz \rightarrow p_2 - p_1 = -\rho * g * (z_2 - z_1)$$

Possiamo notare come la differenza di pressione dipenda soltanto dalla differenza di quota, oltre che dalla pressione, per cui al variare della pressione in un punto varierà anche negli altri.

APPLICAZIONE PRINCIPIO DI PASCAL: TORCHIO IDRAULICO → Il torchio idraulico è un contenitore rigido formato da due cilindri di sezione differente connessi tra loro tramite un canale. In tale contenitore è presente del liquido, come mostrato in figura. Applicando una forza perpendicolare alla superficie sulla superficie libera della parte di fluido contenuta nel cilindro a diametro inferiore la pressione aumenterà di $p = \frac{F_1}{A_1}$ in tutto il fluido (per la Legge di Pascal). In tal modo sulla superficie libera del liquido contenuto nell'altro cilindro si avrà una forza perpendicolare alla superficie e uscente pari a $F_2 = p * A_2$. Essendo $A_2 > A_1$ si avrà di conseguenza che $F_2 > F_1$. Tale aumento di forza ha però un costo, ovvero la variazione di quota del liquido contenuto nel cilindro di sezione inferiore sarà > della variazione di quota del fluido contenuto nel cilindro più grande. Si ha quindi che:

$$F_2 * \Delta h_2 = F_1 * \Delta h_1$$



DEFINIZIONE: LEGGE DI ARCHIMEDE → la legge di Archimede afferma che ogni corpo immerso in un fluido riceve una spinta dal basso verso l'alto pari al volume di fluido spostato dal corpo stesso.

DEFINIZIONE: VELOCITA' LIMITE → In fluidodinamica, la velocità limite è la massima velocità che un corpo immerso in un fluido (ad esempio nell'aria o nell'acqua) può raggiungere quando è sottoposto ad una forza di resistenza fluidodinamica (dovuta alla presenza del fluido) che compensa esattamente una forza costante agente nel senso opposto (ad esempio la forza di gravità o la forza di galleggiamento).

Si parla in particolare di:

- velocità terminale di caduta se la forza di resistenza fluidodinamica contrasta la forza di gravità (come succede nel caso di un corpo in caduta libera nell'aria);
- velocità terminale di risalita se la forza di resistenza fluidodinamica contrasta la forza di galleggiamento (come succede nel caso delle bolle d'aria che si innalzano nell'acqua).

DIMOSTRAZIONE: LE SUPERFICI ISOBARE SONO ANCHE EQUIPOTENZIALI → in un fluido ideale sul quale sono applicate delle forze, la relazione tra tali forze e la pressione del fluido è:

$$f_v = \nabla p$$

E più nello specifico, nel caso di un fluido sottoposto solo alla pressione atmosferica e al suo peso si ha che:

$$\rho * g = \nabla p$$

Prendiamo in analisi la differenza di pressione tra due punti del fluido a distanza infinitesima:

$$dp = \nabla p * dr \rightarrow dp = \rho * g * dr \rightarrow dp = \rho * dU$$

dove $dU = g * dr$ è la differenza di energia potenziale gravitazionale tra i due punti. Si ha allora che se i due punti sono caratterizzati dalla stessa pressione e quindi $dp = 0$ allora anche $dU = 0$. Ne consegue che le superfici isobare, sono anche equipotenziali.

DIMOSTRAZIONE: ISOTROPIA DELLA PRESSIONE → in un fluido ideale la forza esercitata attraverso una parete infinitesima che delimita la porzione di fluido è sempre perpendicolare alla superficie della parete ed è uguale a:

$$dF = p * dS * u_n$$

Inoltre l'intensità della pressione non è dipendente dall'inclinazione della superficie e tale proprietà è detta appunto isotropia. Dimostriamo tale enunciato:

- consideriamo un punto O come origine e disegniamo una figura infinitesima come quella qui a destra caratterizzata da:
 - o volume uguale a $dV = \frac{dx * dy * dz}{4}$;
 - o area della superficie uguali a $dS_z = \frac{dx * dy}{2}$;
 - o dS_z e dS legate tra loro dalla relazione: $dS_z = dS * n * k \rightarrow dS = \frac{dS_z}{n * k}$
- Se il fluido è in equilibrio la risultante delle forze agenti su di esso deve essere 0. In particolare analizziamo la proiezione delle forze sull'asse Z:

$$p_k * dS_z - p_n * dS * n * k + f_v * dV * k = 0$$

- Sostituendo a dV ed a dS i valori precedentemente citati otteniamo:

$$p_k * dS_z - p_n * \frac{dS_z}{n * k} * n * k + f_v * \frac{dx * dy * dz}{4} * k = 0$$

- Sostituendo inoltre $dS_z = \frac{dx * dy}{2}$ otteniamo:

$$p_k * \frac{dx * dy}{2} - p_n * \frac{dx * dy}{2(n * k)} * n * k + f_v * \frac{dx * dy * dz}{4} * k = 0 \rightarrow p_k - p_n + f_v * \frac{dz}{2} * k = 0$$

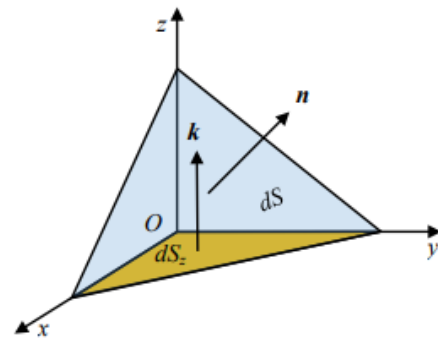
- Dividendo nei due membri si ha che:

$$p_k - p_n = -f_v * \frac{dz}{2} * k$$

- Ed infine per dz che tende a 0, si ha che:

$$p_k - p_n = 0 \rightarrow p_k = p_n$$

- Le due pressioni sono uguali, per cui la pressione non dipende dall'inclinazione della superficie, gode quindi della proprietà dell'isotropia.



SISTEMI TERMODINAMICI

DEFINIZIONE: EQUILIBRIO TERMODINAMICO → un sistema si trova in equilibrio termodinamico quando è in equilibrio termico, chimico e meccanico.

DEFINIZIONE: PRINCIPIO ZERO DELLA TERMODINAMICA → dati 3 sistemi A, B e C, se A è in equilibrio termico con B e se C è in equilibrio termico con B, allora A e C saranno in equilibrio termico tra loro.

DEFINIZIONE: TRASFORMAZIONE REVERSIBILE → una trasformazione termodinamica si dice reversibile se la variazione di entropia totale è pari a 0. Le condizioni affinché una trasformazione possa essere reversibile sono:

- Deve essere quasi-statica:
 - o Affinchè una trasformazione sia quasi-statica è necessario che la pressione del gas sia uguale in tutto il sistema per tutta la durata della trasformazione. Tale condizione è soddisfatta solo quando si è quasi giunti alla condizione di equilibrio oppure se la trasformazione avviene molto lentamente;
- Durante la trasformazione non devono agire forze non conservative (è proprio per questo motivo che nella realtà non esistono trasformazioni che siano completamente reversibili).

Vi sono alcune tipologie di trasformazioni molto importanti perché di semplice analisi, esse sono:

- Trasformazioni isocore → volume costante;
- Trasformazioni isobare → pressione costante;
- Trasformazioni isoterme → temperatura costante;
- Trasformazioni adiabatiche → trasformazioni nelle quali il sistema è isolato termicamente (solitamente racchiuso da pareti adiabatiche).

DEFINIZIONE: PRIMO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA → Il primo principio della termodinamica, anche detto, per estensione, legge di conservazione dell'energia, afferma che in un universo termodinamico, costituito dal sistema e dal suo ambiente, ovvero in un sistema isolato, l'energia non si crea né si distrugge, ma si trasforma, passando da una forma a un'altra: l'energia può cioè essere trasferita attraverso scambi di calore e di lavoro. L'equazione del primo principio della termodinamica è

$$\Delta U = Q - L$$

dove ΔU è la variazione di energia interna del sistema, Q è la sua quantità di calore ed L il lavoro da/su esso compiuto. Nel caso di trasformazioni quasi-statiche è possibile scrivere il primo principio della termodinamica in forma differenziale:

$$dU = \delta Q - \delta L$$

DEFINIZIONE: COEFFICIENTE DI PRESTAZIONE → Il coefficiente di indica la quantità di calore immesso (riscaldamento) o asportato (raffreddamento) in un sistema rispetto al lavoro impiegato. È quindi, come il rendimento, un parametro che rappresenta la bontà di funzionamento di una macchina ma, a differenza di quest'ultimo, può assumere valore maggiore di 1 (la formula del coefficiente di prestazione è in pratica l'inverso di quella del rendimento di una macchina termodinamica che lavora con due serbatoi di calore).

DIMOSTRAZIONE: EQUAZIONE DI MAYER → consideriamo una trasformazione a volume costante. Dato che il lavoro è dato da $L = \int_A^B p dV = 0$ e dato che la variazione di energia interna del sistema dipende solo dalla temperatura T si ha che:

$$(\delta Q)_v = dU = \left(\frac{dU}{dT} \right) dT$$

Sappiamo però che dU è anche uguale a $dU = n * c_v * dT$ per cui possiamo scrivere c_v come:

$$c_v = \frac{dU}{n * dT}$$

E sostituendo a dU il valore precedentemente trovato $dU = \left(\frac{dU}{dT} \right) dT$ otteniamo che:

$$c_v = \frac{1}{n * dT} * \left(\frac{dU}{dT} \right)_v dT \rightarrow c_v = \frac{1}{n} * \left(\frac{dU}{dT} \right)_v$$

Esplicitiamo per dU :

$$c_v = \frac{1}{n} * \left(\frac{dU}{dT} \right)_v \rightarrow dU = n * c_v * dT$$

E ricordando l'equazione del primo principio della dinamica per le trasformazioni quasi-statiche (e quindi in forma differenziale) si ha:

$$dU = \delta Q - \delta L \rightarrow n * c_v * dT = \delta Q - \delta L$$

Esplicitando per δQ si ottiene:

$$\delta Q = n * c_v * dT + \delta L$$

E siccome $L = \int_A^B P dV$ l'equazione diventa:

$$\delta Q = n * c_v * dT + p * dV$$

Tale equazione è detta primo principio delle trasformazioni quasi-statiche.

Prendiamo ora in considerazione l'equazione di stato dei gas perfetti $P * V = n * R * T$ e differenziamola:

$$p * dV + V * dp = n * R * dT$$

Sostituiamo $P * dV$ nell'equazione del primo principio delle trasformazioni quasi-statiche ottenendo:

$$\delta Q = n * c_v * dT + (n * R * dT - V * dp)$$

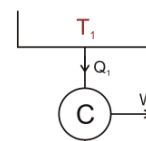
E dato che

$$c_p = \frac{1}{n} * \left(\frac{\delta Q}{dT} \right)_p \rightarrow c_p = \frac{1}{n} * \left(\frac{n * c_v * dT + (n * R * dT - V * dp)}{dT} \right)_p = c_v + R$$

Si ha infine

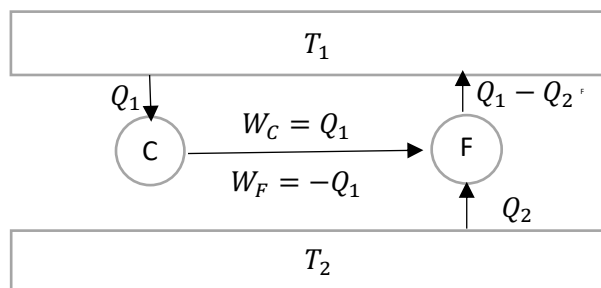
$$c_p = c_v + R$$

Che è la relazione di Mayer.



DIMOSTRAZIONE: SECONDO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA, ENUNCIATO DI KELVIN-PLANCK → l'enunciato di Kelvin-Planck afferma che è impossibile realizzare una trasformazione ciclica il cui unico risultato sia la trasformazione in lavoro di tutto il calore assorbito da una sorgente omogenea. Dimostriamo l'enunciato:

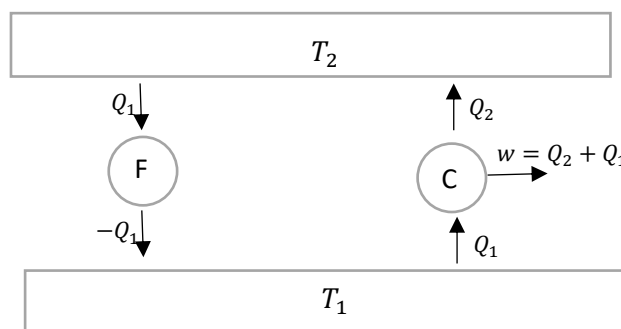
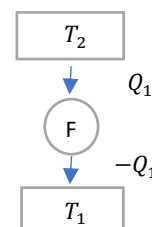
- Consideriamo per assurdo che non valga l'enunciato di Kelvin-Planck e che si possa trasformare tutto il calore assorbito da una sorgente in lavoro, potremmo allora costruire una macchina termica C come quella qui a destra.
- Consideriamo ora una macchina F che, grazie al lavoro W prodotto dalla prima macchina porta del calore da una sorgente più fredda ad una più calda, ed uniamo le due macchine in un unico sistema:



- Verifichiamo ora il bilancio energetico del sistema costituito da C ed F:
 - o Il calore totale scambiato con T_1 è: $Q_1 - (Q_1 - Q_2) = Q_2$;
 - o Il calore totale scambiato con T_2 è Q_2 ;
 - o Il lavoro totale del sistema è $W_c + W_f = 0$;
- Si ha dunque una macchina complessiva che senza ricevere calore dall'esterno trasporta calore da un corpo più freddo ad uno più caldo senza un apporto di lavoro esterno, e questo contraddice l'enunciato di Clausius.

DIMOSTRAZIONE: SECONDO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA, ENUNCIATO DI CLAUSIUS → L'enunciato di Clausius afferma che è impossibile realizzare una trasformazione il cui unico risultato sia quello di trasferire calore da un corpo più freddo ad uno più caldo senza l'apporto di lavoro esterno. Dimostriamo l'enunciato:

- Consideriamo falso l'enunciato di Clausius e costruiamo una macchina termodinamica F che assorba calore da una sorgente a temperatura inferiore T_2 e ceda calore a una sorgente a temperatura superiore T_1 senza l'apporto di lavoro esterno come in figura a destra;
- Consideriamo ora una seconda macchina C che, in accordo con l'enunciato di Planck-Kelvin preleva calore dalla sorgente T_1 e cede calore alla sorgente T_2 producendo lavoro: in particolare il calore assorbito dalla macchina C da T_1 è esattamente uguale a quello ceduto dalla macchina F a T_2 . Affianchiamo quindi queste due macchine per formare un unico sistema termodinamico ottenendo:



NOTA: diamo a Q_2 segno positivo perché Q_2 è già di per sé una quantità negativa: quando leggi Q_2 è come se ci fosse scritto $-|Q_2|$

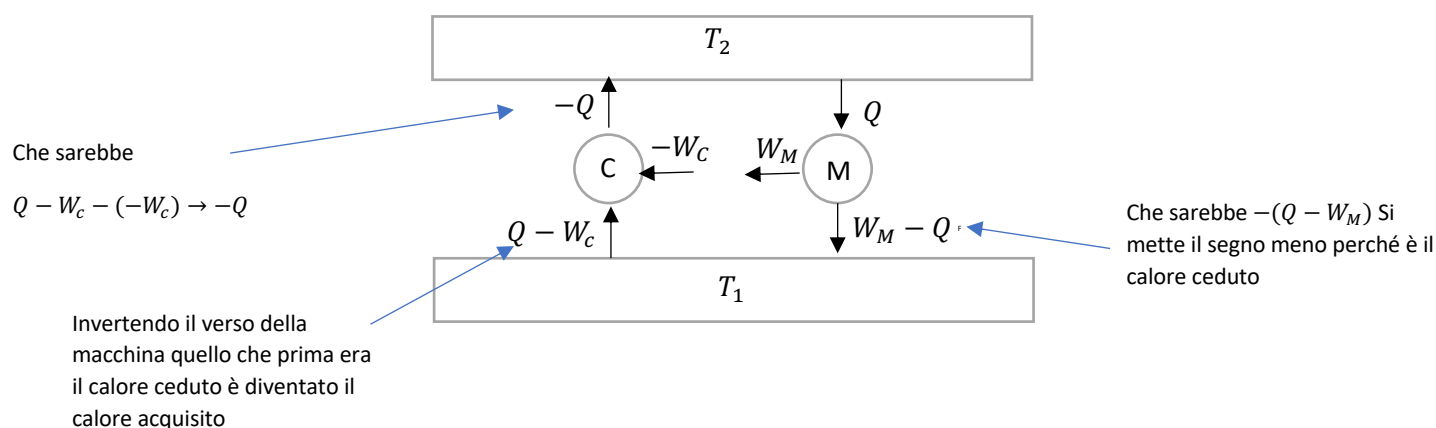
- Controlliamo adesso il bilancio energetico del sistema termodinamico ottenuto:
 - o Il calore totale scambiato con T_2 è $Q_1 + Q_2$;
 - o Il calore totale scambiato con T_1 è $Q_1 - Q_1 = 0$;
 - o Il lavoro $w = Q_2 + Q_1$;

- Si ottiene in pratica una macchina complessiva che assorbe calore da T_2 e trasforma totalmente tale calore in lavoro, e questo contraddice l'enunciato di Kelvin-Planck.

DIMOSTRAZIONE: TEOREMA DI CARNOT → il teorema di Carnot afferma che non è possibile realizzare una macchina termica operante tra due sorgenti che abbia un rendimento maggiore di quello della macchina di Carnot operante tra le stesse sorgenti. Dimostriamo l'enunciato:

- Consideriamo una macchina di Carnot C che trasferisce calore da una sorgente calda T_2 ad una sorgente fredda T_1 e una generica macchina termica M (della quale ignoriamo se sia reversibile o irreversibile) che agisce tra le stesse sorgenti di calore;
- Essendo la macchina di Carnot reversibile è possibile invertirla facendole trasferire calore da T_1 a T_2 assorbendo lavoro dall'esterno.

Accostiamo la macchina M e la macchina C invertita per formare un unico sistema termodinamico:



- Controlliamo il bilancio energetico del sistema complessivo:
 - o Il calore totale scambiato con T_2 è $Q - Q = 0$;
 - o Il calore totale scambiato con T_1 è $Q - W_c + W_m - Q = W_{tot}$;
 - o Il lavoro totale del sistema è $W_{tot} = W_m - W_c$
- In pratica la macchina ottenuta è una macchina che non assorbe calore da T_2 e lo cede a T_1 , e per il secondo principio della dinamica (enunciato di Kelvin-Planck) il lavoro totale deve essere $W_{tot} < 0$, per cui:

$$W_{tot} < 0 \rightarrow W_m - W_c < 0 \rightarrow W_m < W_c$$

Ed ecco dimostrato che il rendimento di una macchina termodinamica qualsiasi è sempre inferiore a quello di una macchina di Carnot agente tra le stesse sorgenti.

DIMOSTRAZIONE: RENDIMENTO DELLE MACCHINE DI CARNOT → per ricavare la formula del rendimento di una macchina di Carnot prendiamo in considerazione un ciclo di Carnot, formato ovviamente dalle trasformazioni:

- Isoterma A→B;
- Adiabatica B→C;
- Isoterma C→D;
- Adiabatica D→A;

per il primo principio della termodinamica si ha che, nella trasformazione isoterma A→B vale l'equazione

$$Q_1 = L_{A \rightarrow B}$$

E sapendo che $L_{A \rightarrow B} = \int_A^B p dV$ e che a sua volta $p = \frac{nRT}{V}$ possiamo scrivere che:

$$L_{A \rightarrow B} = \int_A^B \frac{RT}{V} dV \rightarrow L_{A \rightarrow B} = RT_1 \ln \frac{V_B}{V_A} > 0$$

E siccome $Q_1 = L_{A \rightarrow B}$ possiamo scrivere che:

$$Q_1 = RT_1 \ln \frac{V_B}{V_A} > 0$$

Analogamente possiamo calcolare lo scambio di calore nella seconda trasformazione isoterma, ovvero quella C→D (non consideriamo le adiabatiche perché ovviamente nelle adiabatiche non avviene scambio di calore):

$$Q_2 = RT_2 \ln \frac{V_D}{V_C} \rightarrow Q_2 = -RT_2 \ln \frac{V_C}{V_D} < 0$$

Analizziamo ora le altre due trasformazioni, che sono adiabatiche, attraverso le equazioni di Poisson:

$$\begin{cases} T_1 V_B^{\gamma-1} = T_2 V_C^{\gamma-1} \rightarrow T_1 = \frac{T_2 V_C^{\gamma-1}}{V_B^{\gamma-1}} \\ T_1 V_A^{\gamma-1} = T_2 V_D^{\gamma-1} \rightarrow T_1 = \frac{T_2 V_D^{\gamma-1}}{V_A^{\gamma-1}} \end{cases}$$

Inseriamo il segno meno elevando alla -1 il contenuto del logaritmo perché tale operazione ci permetterà di proseguire nei passaggi successivi

Ed eguagliando le due equazioni si giunge a:

$$\frac{T_2 V_C^{\gamma-1}}{V_B^{\gamma-1}} = \frac{T_2 V_D^{\gamma-1}}{V_A^{\gamma-1}} \rightarrow \frac{V_C^{\gamma-1}}{V_B^{\gamma-1}} = \frac{V_D^{\gamma-1}}{V_A^{\gamma-1}} \rightarrow \frac{V_C}{V_B} = \frac{V_D}{V_A}$$

Ricaviamo da questa equazione $\frac{V_B}{V_A}$ così da poter sostituire i risultati nelle equazioni precedentemente trovate analizzando le isoterme:

$$\frac{V_C}{V_B} = \frac{V_D}{V_A} \rightarrow \frac{V_C}{V_D} = \frac{V_B}{V_A}$$

Andando a sostituire nell'equazione $Q_1 = RT_1 \ln \frac{V_B}{V_A} > 0$ si ottiene

$$Q_1 = RT_1 \ln \frac{V_C}{V_D} > 0$$

Ed infine calcolando il rapporto $\frac{Q_1}{Q_2}$ si ottiene:

$$\left| \frac{Q_1}{Q_2} \right| = \left| RT_1 \ln \frac{V_C}{V_D} \right| * \left| \left(-RT_2 \ln \frac{V_C}{V_D} \right)^{-1} \right| \rightarrow \frac{Q_1}{Q_2} = T_1 * (T_2)^{-1} \rightarrow \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

Prendendo infine in considerazione questa equazione $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}$ e l'equazione del coefficiente di prestazione di una macchina

frigorifera $\omega = \frac{|Q_{ass}|}{|W|}$ possiamo scrivere che, essendo il rendimento di una macchina termodinamica generica pari a $\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$, si ha:

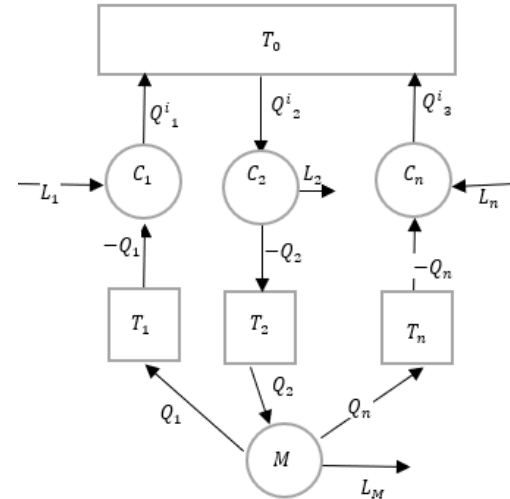
$$\eta_c = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

Nella prossima dimostrazione sarà utile ricordare che per i cicli termodinamici vale la disuguaglianza:

$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0$, dove il segno < vale per i cicli non reversibili mentre il segno = per quelli reversibili.

DIMOSTRAZIONE: TEOREMA (O DISUGUAGLIANZA) DI CLAUSIUS → consideriamo un sistema formato da:

- Una sorgente di calore T_0 ;
- tante sorgenti di calore $T_1, T_2, \dots, T_n$;
- tante macchine di Carnot $C_1, C_2, \dots, C_n$ ognuna delle quali agenti tra T_0 e la rispettiva sorgente di calore T_i ;
- Una generica macchina termica M.



- Supponiamo inoltre che ad ogni ciclo le macchine C_i scambino con i serbatoi T_i una quantità di calore Q che sia uguale in modulo a quella scambiata tra la stessa sorgente T_i e la macchina M ma di segno opposto.
- Ricordando che per le macchine di Carnot (essendo conservative) vale la relazione $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$ possiamo scrivere:

$$\frac{Q'_i}{T_0} + \frac{-Q_i}{T_i} = 0 \rightarrow \frac{Q'_i}{T_0} = -\frac{-Q_i}{T_i} \rightarrow Q'_i = -\frac{-Q_i}{T_i} * T_0 \rightarrow Q'_i = \frac{Q_i}{T_i} * T_0$$

- Vogliamo ora calcolare il calore totale Q'_{TOT} scambiato con T_0 e per farlo dobbiamo ovviamente sommare tutti i calori Q'_i scambiati con tale sorgente di calore. Ricordando inoltre, come appena ricavato, che $Q^i_1 = \frac{Q_1}{T_1} * T_0$ possiamo scrivere:

Q'_T è il calore complessivo scambiato con T_0

$$Q'_T = \sum_i Q'_i \rightarrow Q'_T = \sum_i \frac{Q_i}{T_i} * T_0 \rightarrow Q'_T = T_0 * \sum_i \frac{Q_i}{T_i}$$

- Guardando adesso il sistema termodinamico complessivo ci accorgiamo che, per le ipotesi fatte all'inizio, le sorgenti di calore T_i non sono strettamente necessarie per il funzionamento della macchina, che infatti funziona come una macchina che scambia con la sola sorgente di calore T_0 un calore pari a $Q'_T = \sum_i Q'_i$.

Per l'enunciato di Kelvin si deve avere $Q'_T \leq 0$, ovvero ad ogni ciclo la quantità di calore del sistema diminuisce perché una parte di tale calore viene trasformata in lavoro, per cui:

$$Q'_T = T_0 * \sum_i \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$$

- Il segno della disuguaglianza dipende dalla macchina M:
 - Se M è reversibile: $T_0 * \sum_i \frac{Q_i}{T_i} = 0$;
 - Se M è non reversibile: $T_0 * \sum_i \frac{Q_i}{T_i} < 0$.
- Riassumendo abbiamo quindi ottenuto che per n serbatoi di calore vale la disuguaglianza

$$\sum_i \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$$

T_0 è stato rimosso perché è sicuramente una quantità positiva (non si può arrivare allo 0 kelvin, figuriamoci ad una temperatura in Kelvin negativa) e quindi non influisce sul senso della disuguaglianza

- Vogliamo però estendere tale disuguaglianza ad una trasformazione ciclica in cui la temperatura del sistema varia con continuità: ciò equivale a considerare un numero di serbatoi T_i tendente all'infinito. Per convertire ciò in formula basta sostituire la sommatoria con un integrale:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0$$

- Dove come detto, il segno varia a seconda della reversibilità/non-reversibilità della trasformazione. Tale disuguaglianza è appunto detta "teorema di Clausius".

DIMOSTRAZIONE: L'ENTROPIA E' UNA FUNZIONE DI STATO → Partendo dalla formula del teorema di Clausius $\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0$, consideriamo un ciclo reversibile R e dividiamo tale ciclo in due trasformazioni reversibili R_1 ed R_2 :

$$\begin{aligned} \circ \quad R_1 = \int_i^f \frac{\delta Q}{T} \leq 0; & \quad \rightarrow \quad \left(\oint \frac{\delta Q}{T} \right)_R = \left(\int_i^f \frac{\delta Q}{T} \right)_{R_1} + \left(\int_f^i \frac{\delta Q}{T} \right)_{R_2} = 0 \\ \circ \quad R_2 = \int_f^i \frac{\delta Q}{T} \leq 0; & \end{aligned}$$

La parentesi con R_i come pedice sta a significare che il suo contenuto appartiene alla trasformazione reversibile R_i .

e se $\left(\int_i^f \frac{\delta Q}{T} \right)_{R_1} + \left(\int_f^i \frac{\delta Q}{T} \right)_{R_2} = 0$ si ha ovviamente che:

$$\left(\int_i^f \frac{\delta Q}{T} \right)_{R_1} = - \left(\int_f^i \frac{\delta Q}{T} \right)_{R_2}$$

Che per la reversibilità della trasformazione R_2 si può scrivere come:

$$\left(\int_i^f \frac{\delta Q}{T} \right)_{R_1} = \left(\int_i^f \frac{\delta Q}{T} \right)_{R_2}$$

Abbiamo ottenuto che, pur essendo diverse le due trasformazioni R_1 ed R_2 , le espressioni $\left(\int_i^f \frac{\delta Q}{T} \right)_{R_1}$ e $\left(\int_i^f \frac{\delta Q}{T} \right)_{R_2}$ sono uguali e, ricordando che $\oint \frac{\delta Q}{T}$ è indipendente dalla funzione sulla quale viene applicata, si può concludere che anche l'espressione $\int_i^f \frac{\delta Q}{T}$ è indipendente dalla trasformazione della quale si parla: le grandezze che godono di questa proprietà sono dette Funzioni Di Stato. L'espressione $\int_i^f \frac{\delta Q}{T}$ ricopre infatti un ruolo importante nella termodinamica: viene chiamata Entropia, la quale viene definita come:

$$\left(\int_i^f \frac{\delta Q}{T} \right)_R = \int_i^f dS \rightarrow \left(\int_i^f \frac{\delta Q}{T} \right)_R = S_f - S_i \rightarrow \left(\int_i^f \frac{\delta Q}{T} \right)_R = \Delta S$$

(Si può inoltre notare che $\left(\int_i^f \frac{\delta Q}{T} \right)_R = \int_i^f dS$ è un differenziale esatto.)

(!!! In generale non si può calcolare l'entropia di una trasformazione non reversibile semplicemente effettuando l'integrale sopra indicato: vedremo nel prossimo paragrafo come fare. !!!)

DIMOSTRAZIONE: PRINCIPIO DI ACCRESCIMENTO DELL'ENTROPIA → l'entropia di un sistema isolato termicamente aumenta se esso esegue una trasformazione irreversibile, resta costante se esegue una trasformazione reversibile. Dimostriamo:

- Consideriamo il teorema di Clausius il quale afferma che, per ogni trasformazione; vale la relazione $\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0$, e prendiamo in considerazione un ciclo irreversibile formato da due trasformazioni:

- o R: Trasformazione irreversibile $i \rightarrow f$;
- o I: Trasformazione reversibile $f \rightarrow i$;

- Si avrà quindi, sempre per il teorema di Clausius, che:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \left(\int_i^f \frac{\delta Q}{T} \right)_R + \left(\int_f^i \frac{\delta Q}{T} \right)_I < 0 \rightarrow \left(\int_i^f \frac{\delta Q}{T} \right)_I < - \left(\int_f^i \frac{\delta Q}{T} \right)_R \rightarrow \left(\int_i^f \frac{\delta Q}{T} \right)_I < \left(\int_i^f \frac{\delta Q}{T} \right)_R$$

- Tuttavia possiamo notare che $\left(\int_i^f \frac{\delta Q}{T} \right)_R = \Delta S$, ovvero alla variazione di Entropia. Si può quindi dire che:

$$\left(\int_i^f \frac{\delta Q}{T} \right)_I < \Delta S \rightarrow \Delta S > \left(\int_i^f \frac{\delta Q}{T} \right)_I$$

- Riassumendo:

$$\begin{cases} \Delta S = \left(\int_i^f \frac{\delta Q}{T} \right)_R \\ \Delta S > \left(\int_i^f \frac{\delta Q}{T} \right)_I \end{cases}$$

- Adesso vogliamo calcolare il valore dell'entropia nel caso di una trasformazione non reversibile, ma come detto, questa è un'operazione che non può essere effettuata semplicemente svolgendo l'integrale $\int_i^f \frac{\delta Q}{T}$: è necessario trovare una trasformazione reversibile che possa sostituire la nostra trasformazione irreversibile così da calcolarne l'integrale di Clausius. Possiamo utilizzare a tale scopo un'equazione isoterma dal volume V iniziale al volume V finale, poiché nell'espansione libera di un gas la temperatura rimane costante. Ricordando che nelle isoterme la variazione di energia interna $dU = 0$, che quindi $\delta Q = \delta L$ e che $\delta L = P * dV$ si può scrivere che:

$$\Delta S = \int_i^f \frac{\delta Q}{T} \rightarrow \Delta S = \int_{V_i}^{V_f} \frac{P * dV}{T} \rightarrow \Delta S = \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT * dV}{V * T} \rightarrow \Delta S = \int_{V_i}^{V_f} \frac{nR * dV}{V} \Delta S = nR \int_{V_i}^{V_f} \frac{1}{V} dV \rightarrow \Delta S = nR \ln \frac{V_f}{V_i}$$

- Dove $\Delta S = nR \ln \frac{V_f}{V_i}$ è la variazione di entropia dell'universo. Immaginiamo ora il caso particolare in cui il sistema sia isolato termicamente (e quindi con $\delta Q = 0$). Si avrà allora che:

$$\Delta S \geq \int_i^f \frac{\delta Q}{T} \rightarrow \Delta S \geq 0$$

Tale relazione prende il nome di Principio Di Aumento Dell'Entropia.

Il segno è = e non $\geq$ perché come detto, la trasformazione presa in analisi è una isoterma reversibile

DIMOSTRAZIONE: TEOREMA DI CARNOT A PARTIRE DAL PRINCIPIO DI AUMENTO DELL'ENTROPIA → consideriamo una macchina termica qualsiasi, che durante un ciclo:

- Assorba calore Q da una sorgente di calore;
- Effettui un lavoro L ;
- Ceda calore $L - Q$ ad un serbatoio di calore;

Nella formula dell'entropia non è stato messo l'integrale perché $\Delta S = \int \frac{\delta Q}{T} \rightarrow \Delta S = \frac{Q}{T}$

La variazione di entropia di questa macchina sarà uguale alla somma delle variazioni di entropia delle singole sorgenti di calore, e quindi:

$$\Delta S_u = \Delta S_1 + \Delta S_2 \rightarrow \Delta S_u = \frac{-Q}{T_1} + \frac{-(L - Q)}{T_2}$$

Ovviamente sono presenti i segni “-” poiché i calori scambiati dal punto di vista delle sorgenti di calore hanno segno opposto rispetto a quelli visti dal punto di vista della macchina termica [la sorgente più calda cede calore (segno meno) mentre la macchina termica acquista calore (segno +), e stessa cosa per la sorgente fredda]. Si ha quindi che:

$$\Delta S_u = \frac{Q - L}{T_2} - \frac{Q}{T_1} \rightarrow \Delta S_u = Q * \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) - \frac{L}{T_2}$$

Moltiplicando tutto per T_2 si ottiene:

$$\Delta S_u * T_2 = Q * \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right) - L$$

Cambiando di membro L e ΔS_u si ottiene:

$$L = Q * \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right) - \Delta S_u * T_2$$

E ricordando che il rendimento $\eta = \frac{L}{Q}$ dall'equazione precedente possiamo ricavare:

$$\eta = \frac{L}{Q} = \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right) - \Delta S_u * T_2$$

Che è il rendimento di una generica macchina termica. Consideriamo infine una macchina reversibile (e quindi una macchina di Carnot); si avrà per il teorema di accrescimento dell'entropia che $\Delta S_u = 0$ e quindi l'equazione precedente in tal caso diventa:

$$\eta_{carnot} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

Che è appunto il rendimento di una macchina di Carnot. Ponendo ora a confronto le due equazioni trovate:

- $\eta = \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right) - \Delta S_u * T_2$
- $\eta_{carnot} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$

Si può notare il fatto che $\eta_{carnot} > \eta$ visto che tra i due rendimenti vi è una differenza di $\Delta S_u * T_2$ a favore del rendimento della macchina di Carnot e che il rendimento può avere valore massimo (ideale) di 1 (in realtà tale rendimento non potrà mai essere raggiunto visto che per ottenere $\eta = 1$ servirebbe una temperatura $T_2 = 0 \text{ Kelvin}$, cosa che come sappiamo è impossibile, così come sono impossibili nella realtà le macchine reversibili sempre per lo stesso motivo).

Abbiamo quindi dimostrato il teorema di Carnot, il quale afferma che qualsiasi macchina termica ha rendimento minore della macchina di Carnot agente tra le stesse sorgenti di Calore.